ΘΕΜΑ Α

Α1. δ **Α2.** β **Α3.** β **Α4.** γ
Α5. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστό το α

Η συχνότητα f_A του ανακλώμενου κύματος είναι ίση με τη συχνότητα την οποία αντιλαμβάνεται ο οδηγός του αυτοκινήτου και υ_A η ταχύτητα του αυτοκινήτου που πλησιάζει στην ακίνητη ηχητική πηγή (το περιπολικό) :

$$f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon} f_S = \frac{\upsilon + \frac{\upsilon}{10}}{\upsilon} f_1 = \frac{11}{10} f_1 \quad (1)$$

Το αυτοκίνητο γίνεται κινούμενη πηγή ήχου συχνότητας f_A, την οποία και επανεκπέμπει με ανάκλαση, στο περιπολικό που την καταγράφει με συχνότητα :

$$f_2 = \frac{\upsilon}{\upsilon - \frac{\upsilon}{10}} f_A = \frac{\upsilon}{\frac{9\upsilon}{10}} f_A \xrightarrow{(1)} f_2 = \frac{10}{9}\cdot\frac{11}{10} f_1 = \frac{11}{9} f_1$$ αφού πλησιάζει σε αυτό με ταχύτητα υ_A.

Άρα το πηλίκο των συχνοτήτων είναι: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{11}{9}$.

Β2. Σωστό το γ

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα LC_1 είναι:

$$E_T = U_{E\max} = \frac{1}{2}\frac{1}{C_1}Q^2.$$

Η εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή C_1 είναι:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad \gamma\iota\alpha \quad t_1 = \frac{7T}{4} \quad \text{έχουμε:} \quad q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\omega\frac{7T_1}{4}\right) \quad \text{ή} \quad q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T_1}\cdot\frac{7T_1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$q = Q\sigma\upsilon\nu(3{,}5\pi) \quad \text{άρα} \quad q = Q\sigma\upsilon\nu\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow q = Q\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow q = 0C.$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{7T}{4}$ που ο διακόπτης Δ1 ανοίγει και ταυτόχρονα κλείνει ο διακόπτης Δ2, το πηνίο έχει το σύνολο της αρχικής ενέργειας την οποία μεταφέρει στο 2º κύκλωμα LC_2 δηλαδή την t_1 για την ταλάντωση του LC_2 έχουμε:

$$U'_B = \frac{1}{2}\frac{1}{C_1}Q^2 \quad \text{και} \quad U'_E = \frac{1}{2}\frac{1}{C_2}Q^2.$$

Οπότε από ΑΔΕΤ για το LC_2 έχουμε:

$$E_T' = U_B' + U_E' = \frac{1}{2}\frac{1}{C_1}Q^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_2}Q^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{C_2}Q'^2 = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow \frac{Q'^2}{2C_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)Q^2$$

όμως $C_2 = 2C_1$ άρα $\frac{Q'^2}{2\cdot 2\cdot C_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\cdot C_1}\cdot Q^2$ ή $Q'^2 = 3Q^2$ άρα $\boxed{Q' = \sqrt{3}\cdot Q}$.

Β3. Σωστό το β

Η διαφορά φάσης των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι

$\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \omega t + \frac{\pi}{3} - \left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$. Οι ενέργειες των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι $E_1 = \frac{1}{2} DA_1^2$ και $E_2 = \frac{1}{2} DA_2^2$ (1).

Για το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης ισχύει:

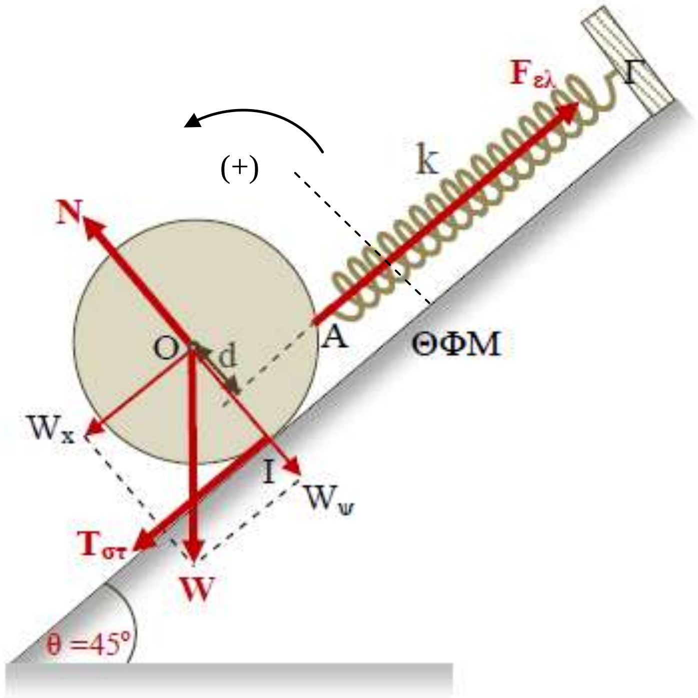
$$A_{ολ}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\underbrace{συν\frac{\pi}{2}}_{0} = A_1^2 + A_2^2 \ (2).$$

Η συνολική ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}DA_{ολ}^2 \xrightarrow{(2)} E_{ολ} = \frac{1}{2}D\left(A_1^2 + A_2^2\right) = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 \xrightarrow{(1)} E_{ολ} = E_1 + E_2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο είναι η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$, το βάρος W, και η δύναμη του δαπέδου που αναλύεται σε δυο συνιστώσες N και $T_{στ}$ όπως φαίνεται στο σχήμα :



Η ροπή της $F_{ελ}$ είναι αντιωρολογιακή , άρα της στατικής τριβής πρέπει να είναι ωρολογιακή , γι αυτό η $T_{στ}$ πρέπει να έχει φορά προς τα κάτω, ομόρροπη με τη W_x.

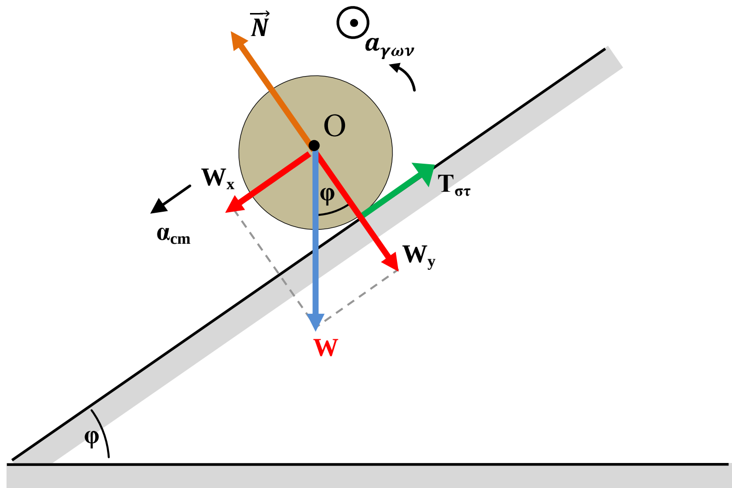
Επειδή ο δίσκος ισορροπεί: $\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow -T_{στ}R + F_{ελ}\dfrac{R}{2} = 0 \Rightarrow T_{στ} = \dfrac{F_{ελ}}{2}$ (1) και

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = T_{στ} + Mg\eta\mu\varphi \xrightarrow{(1)} F_{ελ} = \frac{F_{ελ}}{2} + Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{F_{ελ}}{2} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow F_{ελ} = 2Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{N} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F_{ελ} = 40N}}\ (2)\ \Rightarrow k\Delta\ell = 40\text{N} \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = 0{,}4\text{m}}.$$

Γ2. Από (1) και (2) προκύπτει ότι η στατική τριβή έχει μέτρο $\boxed{T_{στ} = 20\text{N}}$ με διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα κάτω, όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Γ3. Όταν το ελατήριο κόβεται και ο δίσκος αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου οι δυνάμεις που του ασκούνται είναι το βάρος W, η κατακόρυφη αντίδραση του δαπέδου και η στατική τριβή με φορά προς τα πάνω (για να τον περιστρέψει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού μιας και οι υπόλοιπες δυνάμεις δε δημιουργούν ροπή).



Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση ($\Sigma F_x = M\alpha$) και για τη στροφική κίνηση ($\Sigma\tau(o) = I\alpha_{γων}$) του δίσκου έχουμε:

$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow \mathbf{Mg\eta\mu\varphi - T_{στ} = M\alpha_{cm}}$ **(3)** και

$$\Sigma\tau_{(O)} = I\alpha_{γων} \Rightarrow T_{στ}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων} \Rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2}M\underbrace{R\alpha_{γων}}_{\alpha_{cm}} \Rightarrow \mathbf{T_{στ} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}\ (4).}$$

Από (3) + (4) έχουμε: $Mg\eta\mu\varphi = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2}M\alpha_{cm} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = \dfrac{2}{3}\cdot 10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = \dfrac{10\cdot\sqrt{2}}{3}}$ m/s² με διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τα κάτω.

Γ4. Αφού ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$s=\frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2s}{a_{cm}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}3\sqrt{2}\cdot 3}{10\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{18}{100}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}\,s=0{,}3\sqrt{2}\,s.$$

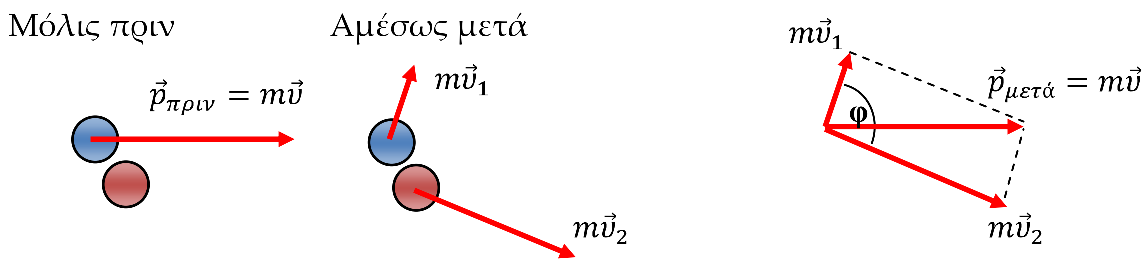
Άρα για το μέτρο της στροφορμής θα έχουμε:

$$L_1=I\omega_1=\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_{cm_1}}{R}=\frac{1}{2}MR\upsilon_{cm_1}=\frac{1}{2}MR\alpha_{cm}t_1=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot 0{,}1\cdot\frac{10\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10}=\frac{6\sqrt{2}}{30}\Rightarrow$$

$$\boxed{L_1=0{,}2\sqrt{2}}\ Kg\frac{m^2}{s}\ .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Αφού $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=0\Rightarrow\ \vec{p}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\ \Rightarrow m\vec{\upsilon}=m\vec{\upsilon}_1+m\vec{\upsilon}_2$ ή με το παραλληλόγραμμο

$$p^2_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}=p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\varphi\ \Rightarrow\ m^2\upsilon^2=m^2\upsilon_1^2+m^2\upsilon_2^2+2m\upsilon_1m\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Rightarrow\upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+2\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi\ \ (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει :

$$K_{\pi\rho\iota\nu}=K_1'+K_2'\Rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m\upsilon_2^2\ \ \Rightarrow\upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2\xrightarrow{(1)}\ \underbrace{2\upsilon_1\upsilon_2}_{\neq 0}\sigma\upsilon\nu\varphi=0$$

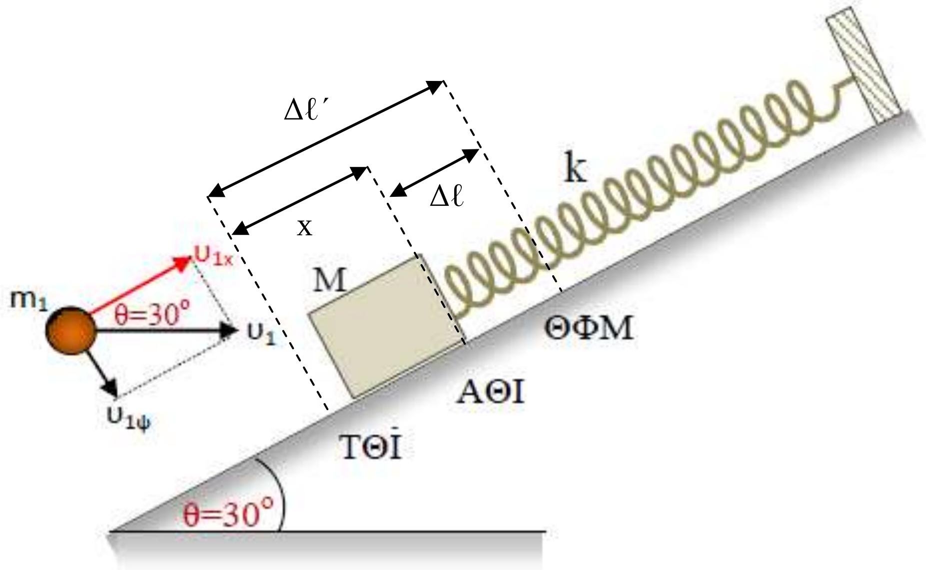
$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$. Επομένως μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν **κάθετα μεταξύ τους.**

Δ2. Αφού $\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2$ αντικαθιστώντας $\upsilon = \frac{4}{3}$ και $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}$ βρίσκουμε:

$$\frac{16}{9} = \upsilon_1^2 + \frac{\upsilon_1^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{4}{3}\upsilon_1^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}} \text{ m/s και } \boxed{\upsilon_2 = \frac{2}{3}} \text{ m/s.}$$

Δ3.

Αναλύουμε την ταχύτητα υ1 της σφαίρας σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη (x'x) και μια κάθετη (ψ'ψ) στο πλάγιο επίπεδο.



Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x'x μόλις πριν και μόλις μετά την πλαστική κρούση των σωμάτων έχουμε:

$$m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta = (M+m_1)\upsilon_\kappa \Rightarrow m\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta = 4m\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \upsilon_\kappa = 0{,}25\frac{m}{s}.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των M, m1 κατά την κρούση είναι:

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda_{\sigma\upsilon\sigma}} - K_{\alpha\rho\chi_{\sigma\upsilon\sigma}} = \frac{1}{2}4m\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \left(2\cdot\frac{1}{16} - \frac{2}{3}\right)J \Rightarrow \boxed{\Delta K = -\frac{13}{24}J}$$

Δ4.

Στην αρχική θέση ισορροπίας (ΑΘΙ) του M ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\cdot\Delta\ell = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{3mg\eta\mu\theta}{k} \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}15\text{m}.$$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος (ΤΘΙ) ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\Delta\ell' = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\Delta\ell' = (M+m_1)g\eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{4mg\eta\mu\theta}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell' = 0{,}2\text{ m}.$$

Το συσσωμάτωμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, έχοντας αρχική απομάκρυνση από την ΤΘΙ: $x = \Delta\ell' - \Delta\ell = 0,05\, m$ και ταχύτητα $\upsilon_\kappa = 0,25 \frac{m}{s}$. Η θέση αυτή (ΑΘΙ) αποτελεί πλέον μια τυχαία θέση της ταλάντωσης που ξεκινά. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και τη θέση πλάτους (ακραία θέση) προκύπτει:

$$K + U = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}4m\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \frac{4m\upsilon_\kappa^2}{k} + x^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{4m\upsilon_\kappa^2}{k} + x^2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{20} \Rightarrow \boxed{A = 0,05\sqrt{2}\; m}$$